Contact
Dit document is samengesteld door onderwijsbureau Bijles en Training. Wij zijn DE expert op het gebied van bijlessen en trainingen in de exacte vakken, van VMBO tot universiteit. Zowel voor individuele lessen op maat als voor doelgerichte groepstrainingen die je voorbereiden op een toets of tentamen. Voor meer informatie kun je altijd contact met ons opnemen
via onze website: **http://www.wiskundebijlessen.nl**
of via e-mail: **marc_bremer@hotmail.com**.

Disclaimer
Alle informatie in dit document is met de grootst mogelijke zorg samengesteld. Toch is het niet uit te sluiten dat informatie niet juist, onvolledig en/of niet up-to-date is. Wij zijn hiervoor niet aansprakelijk. Op geen enkele wijze kunnen rechten worden ontleend aan de in dit document aangeboden informatie.

Auteursrecht
Op dit document berust auteursrecht. Het is niet toegestaan om dit document zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de auteur te kopieren en/of te verspreiden in welke vorm dan ook.

De basiselementen van Markov-ketens zijn:

1. We kijken naar een systeem op regelmatige tijdstippen
2. Op ieder tijdstip kan het systeem in 1 van een aantal vaste toestanden zijn
3. Bij ieder volgend tijdstip, kan het systeem van toestand veranderen
4. De toestand op tijdstip n hangt alleen af van de toestand op tijdstip $n-1$.

Een aandelenhandelaar heeft na jarenlange ervaring het idee dat het stijgen en dalen van aandelen een vast patroon volgt. Om dit kort en bondig te beschrijven heeft hij in een matrix aangegeven wat de kansen zijn dat een aandeel volgend jaar stijgt of daalt, als het dit jaar gestegen, respectievelijk gedaald is. De matrix noemen we P (progress)

		volgend jaar	
		+	-
dit jaar	+	0.7	0.3
	-	0.2	0.8

De aandeelhandelaar weet inmiddels wat zijn aandelen dit jaar gedaan hebben. Wat de handelaar graag wil weten is:

1. Wat zullen zijn aandelen op de lange termijn doen ?
2. Hangt dat af van het resultaat van dit jaar ?

Stel dat de handelaar 150 aandelen heeft, 50 zijn er dit jaar gedaald, 100 gestegen.

Met de volgende berekening komt hij te weten wat er volgend jaar met de aandelen gebeurd:

$$\begin{array}{cc|cc} & & 0.7 & 0.3 \\ & & 0.2 & 0.8 \\ \hline 100 & 50 & 80 & 70 \end{array}$$

Dus zullen er volgend jaar 80 aandelen stijgen en 70 dalen.

Op te weten te komen wat er over 2 jaar met zijn aandelen gebeurd, moet eerst de matrix P^2 berekenen:

$$\begin{array}{cc|cc} & & 0.7 & 0.3 \\ & & 0.2 & 0.8 \\ \hline 0.7 & 0.3 & 0.55 & 0.45 \\ 0.2 & 0.8 & 0.30 & 0.70 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc} & & 0.55 & 0.45 \\ & & 0.30 & 0.70 \\ \hline 100 & 50 & 70 & 80 \end{array}$$

Dus zullen er over 2 jaar 70 aandelen stijgen en 80 dalen.

Wat zal er nu op de lange termijn gebeuren ? Als de toestand zich stabiliseerd, betekent dat het aantal stijgers (zeg s) en het aantal dalers (zeg d) constant blijft, en dat we dus de vergelijking

		0.55	0.45
		0.30	0.70
s	d	s	d

moeten oplossen. Dit geeft de vergelijking:

$$0.55s + 0.30d = s$$

aangevuld met:

$$s + d = 150$$

Door voor d $150 - s$ in te vullen vinden we:

$s = 60$
$d = 90$

Dus op de lange duur zijn er jaarlijks 60 stijgers en 90 dalers.Belangrijk is dat dit dus niet afhangt van de begintoestand !

Bij het uitproberen van zijn systeempje komt de handelaar erachter dat bedrijven wel eens failliet gaan. De kans daarop is na een jaar van daling uiteraard groter dan na een jaar van stijging. In het geval van een faillissement zullen de aandelen (uiteraard) nooit meer stijgen of dalen. De matrix P wordt dan:

	0	+	-
0	1	0	0
+	0.05	0.65	0.3
-	0.1	0.2	0.7

Deze matrix wordt vaak op onderstaande manier in 4 stukken verdeeld:

1	0	0
0.05	0.65	0.3
0.1	0.2	0.7

De toestand 0 noemen we een *absorberende toestand*. Als een absorberende toestand aanwezig is, veranderd het gedrag op lange termijn aanzienlijk. Vroeg of laat beland je immers ALTIJD in de absorberende toestand (een enkele uitzondering daargelaten). En als je erin zit, kom je er nooit meer uit. Vraag is nu: hoelang duurt het voordat je bij een gegeven begintoestand in de absorberende toestand belandt ? (Bij de tijdsduur tellen we dit jaar ook mee).

Om dit te berekenen bepalen we eerst de matrix $I - T$:

0.35	-0.3
-0.2	0.3

Nu bepalen we de matrix $(I - T)^{-1}$. Deze berekening voert te ver voor dit college, dus hij wordt altijd gegeven:

6.67	6.67
4.44	7.78

Tenslotte voeren we de volgende berekening uit:

		1
		1
6.67	6.67	13.33
4.44	7.78	12.22

Conclusie: Als de aandelen dit jaar stijgen (dit is jaar 1), zal het bedrijf naar verwachting in jaar 13 failliet gaan. Als de aandelen in jaar 1 dalen, zal het bedrijf naar verwachting in jaar 12 failliet gaan.

De zaak wordt meer gecompiceerd als er niet 1 maar meerdere absorberende toestanden zijn. Bijvoorbeeld als we kijken naar debiteurenbeleid.

Een rekening zal uiteindelijk of Betaald worden, of niet (Wanbetaling). Er zijn dan 2 absorberende toestanden. Dit geval is relatief eenvoudig omdat we met 3 stappen altijd in een absorberende toestand terecht komen. Een rekening kan nl. 0-30, 31-60 of 61-90 dagen uitstaan. Staat hij langer uit dan valt de rekening definitief onder Wanbetaling. Is hij voor die tijd betaald, dan valt hij (uiteraard) in de categorie Betaald.

De overgangsmatrix is:

	B	W	0-30	31-60	61-90
B	1	0	0	0	0
W	0	1	0	0	0
0-30	0.8	0	0	0.2	0
31-60	0.6	0	0	0	0.4
61-90	0.5	0.5	0	0	0

Kijken we nu naar een rekening die 0-30 dagen loopt. Dan is de toestand over 1 maand:

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc}
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0.8 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\
 & & & & & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.4 \\
 & & & & & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0.2 & 0
\end{array}
$$

Over 2 maanden:

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc}
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0.8 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\
 & & & & & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.4 \\
 & & & & & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0.8 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.92 & 0 & 0 & 0 & 0.08
\end{array}
$$

En over drie maanden:

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc}
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0.8 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\
 & & & & & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.4 \\
 & & & & & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0.92 & 0 & 0 & 0 & 0.08 & 0.96 & 0.04 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

De kans dat de betreffende rekening uiteindelijk niet betaald wordt is dus

0.04.

Niet altijd kom je binnen een klein aantal stappen in een absorberende toestand. Toch is er ook dan een duidelijke strategie om de kans te bepalen dat we in een bepaalde absorberende toestand terechtkomen. In het volgende voorbeeld kijken telkens de 1e van de maand naar het betalingsgedrag van klanten. We registreren op deze dag de langstlopende rekening van een klant. Deze kan 0-30, 31-60 of 61-90 dagen uitstaan. Staat hij langer uit dan is de klant definitief een wanbetaler. Heeft een klant ALLE rekeningen betaald, dan valt de klant in de categorie Betaald. Een klant betaalt altijd zijn oudste rekening als eerste.

De overgangsmatrix wordt:

	B	W	0-30	31-60	61-90
B	1	0	0	0	0
W	0	1	0	0	0
0-30	0.3	0	0.4	0.3	0
31-60	0.1	0	0.2	0.5	0.2
61-90	0.1	0.2	0.1	0.3	0.3

Deze matrix kunnen we als volgt in vieren delen:

$$\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0.3 & 0 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{array}$$

en bij de vier delen horen de volgende symbolen:

$$\begin{array}{c|c} Q & O \\ \hline R & T \end{array}$$

Een klant kan dus in dezelfde categorie blijven. Stel dat hij twee rekeningen open heeft staan, een van 0-30 dagen en een van 31-60 dagen. Als hij dan alleen de rekening van 31-60 dagen betaalt, valt de rekening van 0-30 dagen inmiddels in de categorie 31-60 dagen.

Hoe bepalen we de kans dat een klant in B of W terecht komt:

Om dit te berekenen bepalen we eerst de matrix $I - T$:

0.6	-0.3	0
-0.2	0.5	-0.2
-0.1	-0.3	0.7

Nu bepalen we de matrix $N = (I - T)^{-1}$. Deze berekening voert te ver voor dit college, dus hij wordt altijd gegeven:

2.30	1.67	0.48
1.27	3.33	0.95
0.87	1.67	1.90

Tenslotte voeren we de volgende berekening $N * R$ uit:

			0.3	0
			0.1	0
			0.1	0.2
2.30	1.67	0.48	0.90	0.10
1.27	3.33	0.95	0.81	0.19
0.87	1.67	1.90	0.62	0.38

En deze matrix geeft aan wat de kans is dat je, afhankelijk van de begintoestand, in Betaald of in Wanbetaler terecht komt. Dus bijvoorbeeld: als de langstuitstaande rekening 31-60 dagen loopt, is de kans 81 procent dat een klant uiteindelijk al zijn rekeningen betaalt.

Stel nu dat ik begin met 80 klanten in 0-30, 60 in 31-60 en 40 in 61-90, dan geeft de volgende vermenigvuldiging het aantal klanten dat alles betaalt, respectievelijk wanbetaler wordt:

			0.90	0.10
			0.81	0.19
			0.62	0.38
80	60	40	145.4	35.6

Uiteindelijk blijven we dus zitten met 35 wanbetalers.

Twee andere vragen die vraag gesteld worden zijn:

1. Hoeveel stappen duurt het gemiddeld voordat je weer terug bent in dezelfde toestand ?
2. Hoeveel stappen duurt het gemiddeld om van de ene in de andere toestand te komen ?

Om deze vragen te bekijken, kijken we naar het straatverlichtingsbeheer in een middelgrote stad. In deze stad staan 10000 lampen. In jaar 1 gaat 5 procent stuk, in jaar 2 van de overgebleven lampen 20 procent en in jaar 3 worden alle lampen vervangen op grond van hun leeftijd.
Een voorbeeld van vraag 1 is hoe lang het duurt voor een lamp na plaatsing vervangen wordt. Oftewel hoe lang duurt het voor we weer terug zijn in toestand 1. Daarvoor moeten we de lange-termijn kansverdeling berekenen.

			0.05	0.95	0
			0.20	0	0.80
			1	0	0
e	t	d	e	t	d

Dit geeft de vergelijking:

$0.95e = t$
$0.80t = d$

aangevuld met:

$e + t + d = 1$

Dus:

$t = 0.351$
$d = 0.280$
$e = 0.369$

Van hieruit kunnen we de terugkeertijden berekenen. Stel bijvoorbeeld dat er 10 procent kans is dat ik in een bepaalde toestand ben. Dan moet ik dus 1 van de 10 stappen daar gemiddeld aanwezig zijn. En duurt een rondje dus gemiddeld 10 stappen.

$\mu_{tt} = \frac{1}{0.351} = 2.85$
$\mu_{dd} = \frac{1}{0.280} = 3.57$
$\mu_{ee} = \frac{1}{0.369} = 2.71$

Kortom, een lamp wordt gemiddeld om de 2,71 maanden vervangen.

De tweede vraag is lastiger.

Het verwachte aantal stappen van de eerste naar de derde maand noemen we μ_{ed}. Stel we nemen nu 1 stap. Dan is er NA die stap 5 procent kans dat we in toestand e zitten en dat we nog steeds μ_{ed} stappen moeten nemen, en 95 procent kans dat we in de tweede maand zitten, en nog maar μ_{td} stappen moeten nemen (het verwachte aantal stappen van de tweede naar de derde maand). Dat geeft de volgende vergelijking:

$\mu_{ed} = 1 + 0.05\mu_{ed} + 0.95\mu_{td}$

Op dezelfde manier kunnen we de overige 5 vergelijkingen opstellen en krijgen we een set van 6:

$\mu_{et} = 1 + 0.05\mu_{et}$
$\mu_{te} = 1 + 0.80\mu_{de}$
$\mu_{ed} = 1 + 0.05\mu_{ed} + 0.95\mu_{td}$
$\mu_{de} = 1$
$\mu_{td} = 1 + 0.20\mu_{ed}$
$\mu_{dt} = 1 + 1\mu_{et}$

Dit geeft achtereenvolgens (ga dit na !):

$\mu_{de} = 1$
$\mu_{te} = 1.8$
$\mu_{et} = 1.05$
$\mu_{dt} = 2.05$

$\mu_{ed} = 2.57$
$\mu_{td} = 1.51$